Universidade federal de Pernambuco
(UFPE)

Notas expositórias de Categorias visando à Topologia Algébrica

Paulo André Viana

16/12/2018

Contents

1 Introdução

Este relatório refere-se a disciplina MA1077 - Iniciação Científica 1 que foi ministrada pelo professor Fernando Souza e em meu caso, orientada pelo professor Marco Barone. Durante a disciplina foram ministrados encontros semanais entre eu e o professor orientador, com o objetivo de introduzir Topologia Algébrica, mas devido a importância da Teoria de Categorias para o estudo de tal área, o aluno e o orientador concordaram focar no estudo de categorias para em seguida estudar a Teoria da Homotopia e a Teoria de Homologia de forma mais aprofundada e de maneira não oficial após a conclusão da disciplina.

Gostaria de agradecer ao coordenador do bacharelado Eudes Naziazeno por proporcionar a disciplina em questão, ao professor Fernando Souza por administrar a disciplina e pela sua paciência e compreensão com minha pessoa tanto no começo como no final da disciplina, ao professor Peter Johnson por demonstrar alto interesse em discutir sobre Categorias, outros assuntos e as recomendações bibliográficas. Finalmente ao professor Marco Barone por demonstrar interesse e suporte ao me guiar pelo assunto e pelos cafés financiados na cantina.

Quali fioretti dal notturno gelo
chinati e chiusi, poi che 'l sol li 'mbianca,
si drizzan tutti aperti in loro stelo,

tal mi fec'io di mia virtude stanca,
e tanto buono ardire al cor mi corse...

-Dante Alighieri

Foram utilizadas como referências: An Introduction to Homological Algebra Rotman [2], Homology Mac Lane [1] e as notas "Notes on Grothendieck topologies" Vistoli [3] em ordem de predominância.

2 Categorias, o que são? O que fazem? Para onde vão?

Inicialmente ao definir categorias questões sobre Teoria dos Conjuntos surgem, precisamente sobre o tratamento de classes. Trata-se de algo que por questões de conveniência não será tratado nesse relatório.

Definição 1. *Uma Categoria $\mathcal{C}$ consiste de*

- *Uma classe de objetos de $\mathcal{C}$ denotada $obj\mathcal{C}$*
- *Para cada par ordenado A, B em $obj\mathcal{C}$, um conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$*
- *Uma composição $Hom(A,B) \times Hom(B,C) \to Hom(A,C)$ denotada por $(f,g) \mapsto gf$ para objetos A, B e C em $obj\mathcal{C}$.*

tais que necessitam satisfazer os seguintes axiomas:

1. Para quaisquer pares ordenado de objetos A e B, o conjunto $Hom(A,B)$ é disjunto de qualquer outro conjunto $Hom(A',B')$
2. Para todo objeto $A \in obj\mathcal{C}$ $\exists 1_A \in Hom(A,A)$ tal que $f1_A = f$ e $1_B f = f$, onde $f \in Hom(A,B)$. Chamamos 1_A de identidade de A
3. A composição é associativa

Antes de listar alguns exemplos para entender melhor esta definição abstrata, uma notação que também usarei será a de $Mor\mathcal{C}$ a classe de todos os morfismos da categoria $\mathcal{C}$. Também vale a pena salientar que o Hom-Set (o conjunto de morfismos para qualquer par ordenado na categoria) para pares **ordenados**, ou seja, temos que $Hom(A,B) \neq Hom(B,A)$.

Exemplo 1. *Provavelmente o exemplo mais simples é a Categoria dos Conjuntos* ***Sets****, nela temos:*

- *Objetos: Conjuntos*
- *Morfismos: Funções*
- *Composição: Composição de funções*

Note que os axiomas impostos são satisfeitos simplesmente pela definição de função, também observe que $Hom(A, B)$ denota o conjunto de todas as funções do conjunto A ao conjunto B, mas para entendermos melhor a idea de morfismos, uma das ideias centrais da Teoria de Categorias, precisamos de mais exemplos.

Exemplo 2. *Iremos partir para exemplos de categorias de conjuntos com operações, definimos as seguintes categorias:*
Groups

- *Objetos: Grupos*
- *Morfismos: Homomorfismos de Grupos*
- *Composição: Composição de funções*

Ab

- *Objetos: Grupos Abelianos*
- *Morfismos: Homomorfismos de Grupos*
- *Composição: Composição de funções*

Rings

- *Objetos: Anéis*
- *Morfismos: Homomorfismo de Anéis*
- *Composição: Composiçào de funções*

Passemos agora para a categoria ***Groups****: os morfismos são homomorfismos de Grupos, ao invés de apenas funções; grupos além de serem conjuntos possuem algo a mais, uma operação binária interna, então vemos que por esse exemplo que morfismos buscam preservar a estrutura de seus objetos, nesse caso uma estrutura algébrica. Esses exemplos serão usados mais adiante para outros exemplos.*

Outro exemplo de categoria bastante importante é o da Categoria de Espaços Topológicos,

Exemplo 3. *Definimos a categoria dos espaços topológicos:*
Top

- *Objetos: Espaços Topológicos*

- *Morfismos: Funções contínuas*

- *Composição: Composição de funções*

Vemos novamente que a definição da classe dos morfismos está adaptada à finalidade de preservar a estrutura da categoria que queremos que seja relevante, nesse caso as funções são contínuas, algo ainda mais interessante vem da definição de isomorfismos entre objetos, que vem a seguir:

Definição 2. *Um morfismo $f : A \to B$ em uma categoria $\mathcal{C}$ é um* ***isomorfismo*** *se existe um morfismo $g : B \to A$ em $\mathcal{C}$ tal que*

$$gf = 1_A \text{ e } fg = 1_B$$

Chamamos o morfismo g de ***inversa*** *de f.*

Com essa definição e com o exemplo da categoria **Top**, é fácil notar que se temos um isomorfismo f na categoria **Top**, então existe um morfismo inverso, nesse caso, uma função inversa **contínua**, logo um isomorfismo em **Top** é apenas um homeoformismo entre espações topológicos. Para os exemplos anteriores, **Groups**, **Ab**, **Rings**, teriamos isomorfismos e para **Sets** bijeções.
Agora alguns exemplos interessantes de categorias:

Exemplo 4. *Seja X* ***um*** *conjunto parcialmente ordenado (Poset), definimos uma categoria correspondente a X que denotaremos por* ***PosetX*** *como:*

- *Objetos: Elementos de X*

- *Morfismos:*

$$Hom(x,y) := \begin{cases} \emptyset & se\ x \npreceq y \\ i^x_y & se\ x \preceq y \end{cases}$$

- *Composição: $i^x_y i^y_z = i^x_z$*

Essa categoria está bem definida devido a reflexividade e transitividade de $\preceq$.
Note que estamos definindo a categoria para apenas um Poset X e não a categoria de todos os Posets. Também podemos definir similarmente uma categoria para um espaço topológico X e usar a relação de continência de abertos na topologia $\subseteq$ no lugar de $\preceq$.

Exemplo 5. *A categoria de Pointed Sets* ***Sets****. *Seja $X \neq \emptyset$ e $x_0 \in X$, chamamos x_0 de ponto base de X. Definamos um Pointed Set pelo par $(X,\ x_0)$ e definimos* ***Sets**** *por,*

- *Objetos: Todos os pares $(X,\ x_0)$*

- *Morfismos:*

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0) \text{ definido por } f : X \to Y \text{ com } f(x_0) = y_0$$

- *Composição: Composição de funções*

*De maneira equivalente podemos definir **Top*** apenas usando espaços topológicos ao invés de conjuntos e acrescentando a condição de continuidade nos morfismos.*

Exemplo 6. *Um exemplo interessante onde a categoria não leva o nome de seus objetos, mas sim de seus morfismos é a categoria das matrizes sobre um corpo, $Matr_F$:*

- *Objetos: Inteiros Positivos*

- *Morfismos: Hom(m,n) = $\{$Todas as matrizes $n \times m$ sobre o corpo $\mathbb{F}\}$*

- *Composição: Multiplicação de Matrizes*

Note a inversão na ordem entre os inteiros positivos n e m entre o nome do Hom-Set e a sua definição, isso é necessário para definirmos a composição como produto de matrizes. E essa composição está bem definida, pois o produto de matrizes é associativo e temos o morfismo identidade em Hom(n,n), sendo a matriz identidade.

Exemplo 7. *A categoria do monóide G, $\mathcal{C}(G)$:*

- *Objetos: Existe apenas um objeto na categoria, chamado $*$*

- *Morfismos: Hom(*,*)=G, ou seja, o único Hom-Set é o monóide*

- *Composição: $Hom(*, *) \times Hom(*, *) \mapsto Hom(*, *)$ com $G \times G \mapsto G$*

Repare que os Morfismos $* \mapsto *$ não são funções, mas sim a operação binária do monóide.

O último exemplo dessa secção é muito importante para o estudo da Teoria de Homotopia, e leva o nome da mesma, mas antes, duas definições,

Definição 3. *Se f_0, $f_1 : X \to Y$ são funções contínuas, onde X e Y são espaços topológicos, então digo que f_0 é **homotópico** a f_1, $f_0 \simeq f_1$, se existe uma função contínua $h : I \times X \to Y$ (onde $I = [0, 1]$), tal que $h(0, x) = f_0(x)$ e $h(1, 0) = f_1(x)$ para todo $x \in X$.*

Chamamos a função h da definição acima de **homotopia** e podemos pensar essa definição da seguinte forma, durante o intervalo de tempo $[0, 1]$ temos que h deforma f_0 em $t = 0$ em f_1 em $t = 1$. Uma homotopia é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas $X \to Y$ e a classe de equivalência $[f]$ de fé chamada de **Classe de homotopia**.

Definição 4. *Entendemos por equivalência homotópica um mapa contínuo* $f : X \to Y$ *para o qual existe um* $g : Y \to X$ *também contínuo, tal que* $gf \simeq 1_X$ *e* $fd \simeq 1_Y$*. Note que existe um isomorfismo com as composições entre f e g, e não uma igualdade, ou seja g não é uma inversa de f, mas podemos ver como uma inversa homotópica.*

Exemplo 8. *Uma categoria de homotopia **Htp** é definida como:*

- *Objetos: Todos os espaços Topológicos*
- *Morfismos: Todas as classes de homotopia de funções contínuas*
- *Composição:* $[f][g] = [fg]$ *se* $f \simeq f'$ *e* $g \simeq g'$

Note que a composição $fg \simeq f'g'$ *é preservada por homotopia e o morfismo identidade são as classes de homotopia do tipo* $[1_X]$.

Definição 5. *Uma categoria* $\mathcal{S}$ *é uma subcategoria de uma categoria* $\mathcal{C}$ *se:*

1. $obj\mathcal{S} \subseteq obj\mathcal{C}$
2. $Hom_{\mathcal{S}}(A, B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A, B)\ \forall A, B \in obj\mathcal{S}$
3. *Se* $f \in Hom_S(A, B), g \in Hom_S(B, C)$, *então* $gf \in Hom_S(A, B)$ *é igual a* $gf \in Hom_C(A, C)$
4. *Se* $A \in obj\mathcal{S}$, *então* $1_A \in Hom_{\mathcal{S}}(A, A)$ *é igual a identidade* $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$

Pela definição acima, vale citar que a categoria de homotopia **Htp** não é uma subcategoria de **Top**, mesmo que *obj***Htp** = *obj***Top**, os morfismos em **Htp** não são funções contínuas, mas sim classes de homotopia.

3 Módulos

Dando uma pausa nos exemplos, irei falar um pouco sobre módulos e a categoria de módulos.

Definição 6. *Seja R um Anel. Um R-Modulo Esquerdo M é um grupo abeliano com uma operação binária* $\mu : R \times M \to M$ *com* $(r, m) \mapsto rm$ *chamada multiplicação por escalar, tal que satisfaz as seguintes relações:*

1. $(r + r')m = rm + r'm$
2. $r(m + m') = rm + rm'$

3. 1m = m

4. r(r'm)=(rr')m

Das relações dadas na definição, segue que:

- $0m = 0$, por
  $0m = 0 + 0m = (0 + 0)m = 0m + 0m$, como M é um grupo, temos que$0m = 0$

- $(-1)m = -m$, por
  m + (-1)m = (1-1)m = 0m = 0, logo $(-1)m$ é o inverso de m, assim $(-1)m = -m$

Alguns exemplos seguem:

Exemplo 9.

- *Se R é um corpo, então um R-Modulo V é nada mais que um espaço vetorial V*

- *Para um corpo F, seja $R = \mathbb{F}[x]$, então um R-Modulo V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com uma operação linear fixa $T : V \to V$ dada pela multiplicação à esquerda por $x \in R$*

- *Sendo $R = \mathbb{Z}$, temos um $\mathbb{Z}$-Modulo, tal que para $a \in \mathbb{Z}$ com $am = m + ... + m$ (soma generalizada de a-cópias de m), então um $\mathbb{Z}$-Modulo é um grupo abeliano (noção de múltiplos inteiros).*

- *Um $\mathbb{Z}_k$-Modulo é um grupo abeliano no qual todo elemento possui como ordem um múltiplo de k.*

- *O R-Modulo R, ou seja, vemos o mesmo anel R como o grupo, onde pegamos $\mu : R \times R \to R$ como produto do anel que satisfaz as relações de associatividade e identidade sobre R, logo tratamos μ como o produto no anel R.*

Definição 7. *Um subconjunto S de um R-Modulo é um* ***Submódulo*** *Esquerdo se é fechado sobre a adição e se para cada $r \in R$ e $s \in S$ temos $rs \in S$, ou seja, um módulo.*

Se pegarmos um Submódulo Esquerdo I de R (R como R-Modulo), então temos que I é um Ideal Esquerdo de R.

Definição 8. *Assim definimos a categoria ${}_RMod$ como a categoria dos R-Modulos Esquerdos,*

- *Objetos: Todos os R-Modulos Esquerdos*

- *Morfismos: Todas as funções $\alpha : A \to B$ para A e B R-Modulos, tal que,*
  $\alpha(a + a') = \alpha(a) + \alpha(a')$
  $\alpha(ra) = r\alpha(a)$
  Chamamos α um homomorfismo de módulos.

- *Composição: Composição de funções*

Por fim, denotamos os Hom-Sets in ${}_R Mod$ por $Hom_R(A, B)$

Definição 9. *Seja $\alpha : A \to B$ um homomorfismo de módulos, demininamos A de domínio de α e B de seu contradomínio. Se $Ker\alpha = 0$, dizemos que α é um monomorfismo, se $Im\alpha = B$ dizemos que é um epiformismo e se α é tanto monomorfismo como epimorfismo, então α é um isomorfismo.*

Proposição 1.

- *$Im\alpha$ é submódulo de B (R-Modulo).*
  Prova: Dados $b = \alpha(a)$ e $b' = \alpha(a')$ em $Im\alpha$, vemos que $\alpha(a) + \alpha(a') = \alpha(a + a') \in Im\alpha$, logo $Im\alpha$ é fechada pela adição. Dados $r \in R$ e $b = \alpha(a) \in Im\alpha$, temos $r\alpha(a) = \alpha(ra) \in Im\alpha$. Logo $Im\alpha$ é submódulo de B.

- *$Ker\alpha$ é submódulo de A (R-Modulo).*
  Prova: Dados $a, a' \in Ker\alpha$, vemos que $0 = \alpha(a) + \alpha(a') = \alpha(a + a')$ então $a + a' \in Ker\alpha$. Pegue $r \in R$ e $a \in Ker\alpha$, então, $\alpha(ra) = r\alpha(a) = r0 = 0$ então $ra \in Ker\alpha$. Assim $Ker\alpha$ é submódulo de A.

Note que em geral dados R e G anéis e $\phi : R \to G$ um homomorfismo de anéis então $Ker\phi$ não seria subanel, pois para $r \in R$ e $a \in Ker\phi$, temos $\phi(ra) = \phi(r)\phi(a) \neq r\phi(a)$ A igualdade só é verdade se ϕ é a identidade. Em anéis temos que, para ϕ homomorfismo de anéis, $Ker\phi$ é um Ideal do domínio de ϕ, nesse caso R.

Note que de maneira simples podemos mostrar que dados α_1 e α_2 homomorfismos, $\alpha_1 + \alpha_2$ é homomorfismo. E para homomorfismos α e β tais que $Domain\beta = Codomain\alpha$, então $\beta\alpha$ é homomorfismo.

Definição 10. *Para $\alpha : A \to B$ e $\beta : B \to C$, definimos o par (α, β) como exato em B se $Ker\beta = Im\alpha$.*

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

Uma sequência de n-homomorfismos $\alpha_i : A_i \to A_{i+1}$ é dita exata se (α_{i-1}, α_i) é e exato em A_i.

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} ... \xrightarrow{\alpha_{i-1}} Ai \xrightarrow{\alpha_i} ... \xrightarrow{\alpha_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_n$$

Proposição 2. *Sejam B e B' R-Modulos, se $\beta : B \to B'$ com $T \subseteq Ker\beta$, existe um único homomorfismo de módulos $\beta' : B/T \to B'$ com $\beta'\pi = \beta$, onde π é o mapa quociente. Isso quer dizer que o seguinte diagrama, com $\beta(T) = 0$, comuta:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\beta"'] & B/T \arrow[d, "\beta'"] \\ & B' \end{tikzcd}$$

Prova: Faça $\beta'(b + T) = \beta b$; Já que $T \subseteq Ker\beta$, a igualdade está bem definida.

4 Funtores

Voltamos a tratar de Categorias, trabalhando agora com Funtores.

Definição 11. *Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias, então um **funtor covariante** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma função tal que:*

1. *Se $A \in obj\mathcal{C}$, então $F(A) \in obj\mathcal{D}$*
2. *Se $f : A \to A'$ é morfismo em $\mathcal{C}$ então $F(f) : F(A) \to F(A')$ é morfismo em $\mathcal{D}$*
3. $$\text{Se } A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \text{ então,}$$
   $$F(A) \xrightarrow{Ff} F(B) \xrightarrow{Fg} F(C) \qquad \text{e } F(gf) = F(g)F(f)$$
4. $F(1_A) = 1_{F(A)}\ \forall A \in obj\mathcal{C}$

Revisitando a definição de categorias e seus axiomas, é fácil ver que funtores preservam as propriedades entre categorias. Os exemplos adiante explicítam mais isso.

Exemplo 10. *Se $\mathcal{S}$ é uma subcategoria de uma categoria $\mathcal{C}$, então podemos redefinir uma subcategoria dizendo que $I : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ é um funtor, chamado de Funtor Inclusão de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{C}$.*

Exemplo 11. *Dada uma categoria $\mathcal{C}$, existe um funtor chamado **funtor identidade** $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, definido por:*

- $1_{\mathcal{C}}(A) = A$, $\forall A \in obj\mathcal{C}$
- $1_{\mathcal{C}}(f) = f$, $\forall f \in Mor(\mathcal{C})$

Agora será definido um funtor bastante importante, o Hom-funtor.

Definição 12. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria e dado um objeto A fixo em $\mathcal{C}$, então o Hom-funtor $F_A : \mathcal{C} \to Sets$ é definido por,*

$$F_A(B) = Hom(A, B)\ \forall B \in obj\mathcal{C}$$

e se $f : B \to B'$, então $Hom(A, f) : Hom(A, B) \to Hom(A, B')$ é dado por $Hom(A, f) : h \mapsto fh$. Chamamos $Hom(A, f)$ de mapa induzido e o denotamos por $f_* : h \mapsto fh$.

Iremos agora verificar se o Hom-funtor safistaz as propriedades de ser um funtor, a funtorialidade $(F(gf) = F(g)F(f))$ e levar a identidade de uma categoria para a outra.
Seja $f : B \to C$ e $g : C \to D$. Mostraremos que $(gf)_* = f_*g_*$. Ambos possuem mesmo domínio e contra domínio, $(gf)_*, f_*g_* : Hom(A, B) \to Hom(A, D)$.
Se $h \in Hom(A, B)$, então,

$$(gf)_* : h \mapsto (gf)h \tag{1}$$

$$g_*f_* : h \mapsto fh \mapsto g(fh) \tag{2}$$

Por associatividade, $(gf)h = g(fh)$, logo $(gf)_* = g_*f_*$. Se f é a identidade $1_B : B \mapsto B$, então

$$(1_B)_* : h \mapsto 1_B h = h \quad \forall h \in Hom(A, B) \tag{3}$$

$$(1_B)_* = 1_{Hom(A,B)} \tag{4}$$

Um funtor interessante para "brincar" com a idéia de estruturas matemáticas é o **funtor de esquecimento**, que "esquece" uma determinada estrutura de um objeto matemático.

Exemplo 12. *Definimos o funtor esquecimento $U : Groups \to Sets$ como $U(G)$, onde o G do domínio é um Grupo (G,*) e na imagem é o conjunto de G sem a estrutura da operação binária do grupo ("esquecemos" ela). E para f homomorfismo em Groups, $U(f)$ é apenas uma função.*

Podemos fazer várias variantes do funtor esquecimento, definindo como $U' : Rings \mapsto Ab$, esquecendo a segunda operação binária do anel, ou até $U'' : Rings \mapsto Sets$ esquecendo ambas as operações binárias.
Na definição de funtor foi definido o funtor **covariante**, agora definiremos o **funtor contravariante**.

Definição 13. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias. Um funtor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma função tal que,*

1. *Se $A \in obj\mathcal{C}$, então $F(A) \in obj\mathcal{D}$*
2. *Se $f : A \to A'$ é morfismo em $\mathcal{C}$ então $F(f) : F(A') \to F(A)$ é morfismo em $\mathcal{D}$*
3. $$\text{Se } A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \text{ então,}$$

$$F(C) \xrightarrow{Fg} F(B) \xrightarrow{Ff} F(A) \qquad e\ F(gf) = F(f)F(g)$$

4. $F(1_A) = 1_{F(A)}\ \forall A \in obj\mathcal{C}$

Note a inversão dos mapas ao aplicarmos o funtor contravariante. Os seguintes exemplos irão trazer um melhor entendimento das diferenças entre funtores covariantes e contravariantes.

Exemplo 13. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria e fixo $B \in obj\mathcal{C}$ o Hom-funtor contravariante $F^B : \mathcal{C} \to$ Sets, também denotado por Hom(-,B), ele é definido para todos os objetos C na categoria $\mathcal{C}$, por*

$$F^B(C) = Hom(C, B)$$

e se $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ é morfismo em $\mathcal{C}$, então $F^B(f) : Hom(C', B) \to Hom(C, B)$ é dado por $F^B : h \mapsto hf$. Também chamamos o tal mapa de mapa induzido e o denotamos por f_*. Note que a composição hf possui ordem contrária de composição com respeito a do Hom-funtor covariante. Tal inversão de ordem ficará mais clara ao checarmos os axiomas de funtor.
Dados morfismos $f : C \to C'$ e $g : C' \to C''$, iremos comparar as composições:

$$(gf)^*, f^*g^* : Hom(C'', B) \to Hom(C, B)$$

Se $h \in Hom(C'', B)$, então,

$$(gf)^* : h \mapsto h(gf)$$

; e também vemos que,

$$f^*g^* : h \mapsto hg \mapsto (hg)f = h(gf)$$

. Agora iremos verificar o mapa de identidade $1_C : C \to C$,

$$(1_C)^* : h \mapsto h1_C = h$$

para todo $h \in Hom(C, B)$, então $(1_C)^* = 1_{Hom(C,B)}$.

Mostraremos agora um exemplo importante de funtor contravariante.

Exemplo 14. *Se V é um espaço vetorial sobre um corpo k, então seu* ***espaço dual*** *é $V^* = Hom_k(V, k)$ (O conjunto dos funcionais lineares em V). V^* é um k-Modulo se para $f \in V^*$ e $a \in k$ definirmos $af : V \to k$ por $af : v \mapsto a[f(v)]$, ou seja, como elemento do espaço dual. Se $f : V \to W$ é uma transformação linear, então seu mapa induzido $f^* : W^* \to V*$ também é uma transformação linear. Finalmente o* ***funtor do espaço dual*** *é denotado por $Hom_k(-, k) : Mod \to Mod$.*

Definição 14. *Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito* ***fiel*** *se, para todos $A, B \in obj\mathcal{C}$ as funções induzidas pelo funtor, $F_{X,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ tais que $f \mapsto Tf$ são injetivas. Um funtor é dito* ***pleno*** *se tais funções são sobrejetivas.*
Uma categoria é dita ***concreta*** *se existe um funtor fiel $U : \mathcal{C} \to Sets$. Podemos entender categorias concretas como aquelas cujos morfismos podem ser vistos como funções.*

Definição 15. *Se $\mathcal{U}$ é a topologia de um espaço topológico X e $\mathcal{C}$ é uma categoria, então definimos um* ***prefeixe sobre*** *X em $\mathcal{C}$ como um funtor contravariante $P : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$.*

Definição 16. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria, definimos a* ***categoria oposta*** *$\mathcal{C}^{op}$ como uma categoria com $obj(\mathcal{C}^{op}) = obj\mathcal{C}$ com morfismos $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ e composição $g^{op} f^{op} = (fg)^{op}$.*

Basicamente a categoria oposta inverte o domínio com o contradominio de um morfismo para cada par de objetos na categoria. É fácil verificar que um funtor contravariante $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ é a mesma coisa que um funtor covariante $S : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{C}^{op}$.
Em $Sets^{op}$ temos, para qualquer conjunto X, o conjunto $Hom_{Sets^{op}}(X, \emptyset)$ que possui exatamente um elemento, i^{op}, onde i é a inclusão $\emptyset \to X$ em $Hom_{Sets}(\emptyset, X)$. Mas i^{op} não pode ser uma função, pois não há funções de um conjunto X para $\emptyset$.

5 Transformações Naturais e o Lema de Yoneda

Agora que exploramos um pouco das definições e alguns exemplos da teoria de categorias, iremos "subir de nível" um pouco mais. Daqui para frente denotaremos o Hom-funtor contravariante para um objeto X como $h_X := Hom(-, X)$.

Definição 17. *Sejam $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores covariantes. Uma* ***transformação natural*** *$\tau : F \to G$ é uma família de morfismos em $\mathcal{B}$ parametrizada pelos objetos de $\mathcal{A}$,*

$$\tau = (\tau_A : FA \to GA)_{\mathcal{A} \in obj\mathcal{A}}$$

tal que o seguinte diagrama comuta para todo morfismo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ em $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\tau_A} & GA \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Ff} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Gf} \\ FA' & \xrightarrow{\tau_{A'}} & GA' \end{array}$$

Definição 18. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Considere uma nova categoria, denotada por $Hom(\mathcal{C}^{op}, Sets)$, cujos objetos são os funtores de $\mathcal{C}^{op}$ para a categoria Sets e os morfismos entre os funtores são as transformações naturais.*

Definição 19. *Fixe um objeto X em uma categoria $\mathcal{C}$. Existe um funtor*

$$h_X : \mathcal{C}^{op} \to Sets$$

que envia um objeto $\mathcal{U}$ da categoria $\mathcal{C}$ ao conjunto

$$h_X\mathcal{U} \to Hom_{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, X)$$

Seja $\alpha : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Um morfismo $f : X \to Y$ produz uma função $h_f\mathcal{U} : h_X\mathcal{U} \to h_Y\mathcal{U}$ para cada $\mathcal{U}$ em $\mathcal{C}$ obtida por composição com f. Isso define uma transformação natural $h_f : h_X \to h_Y$, então para todo mapa $\alpha : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{array}{ccc} h_X\mathcal{U} & \xrightarrow{h_f\mathcal{U}} & h_Y\mathcal{U} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_X\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_Y\alpha} \\ h_X\mathcal{U}' & \xrightarrow{h_f\mathcal{U}'} & h_Y\mathcal{U}' \end{array}$$

Mandando cada objeto X de $\mathcal{C}$ para o funtor h_X e cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ para a transformação natural $h_f : h_X \to h_Y$, definindo um funtor $\mathcal{C} \to Hom(\mathcal{C}^{op}, Sets)$

Teorema 1. *Lema de Yoneda (Versão Fraca) Sejam X e Y objetos de $\mathcal{C}$. A função*

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom(h_X, h_Y)$$

que envia $f : X \to Y$ para $h_f : h_X \to h_Y$ é bijetiva.

Ou seja, o funtor $\mathcal{C} \to Hom(\mathcal{C}^{op}, Sets)$ é plenamente fiel. Mas falha em ser uma equivalência de categorias, porque em geral não é necessariamente sobrejetivo. Isso significa que nem todo funtor $\mathcal{C}^{op} \to Sets$ é isomorfo a um funtor do tipo h_X. Porém se restringirmos à subcategoria cheia da imagem do funtor, conseguimos uma categoria equivalente a $\mathcal{C}$

Definição 20. *Um **funtor representável** em uma categoria $\mathcal{C}$ é um funtor que é isomorfo ao um funtor da forma h_X para algum objeto X em $\mathcal{C}$. Se F satisfaz tais condições, dizemos que F é representado por X.*

Dado dois isomorfismos $F \simeq h_X$ e $F \simeq h_Y$, temos que o isomorfismo resultante $h_X \simeq h_Y$ vem de um isomorfismo único $X \simeq Y$ em $\mathcal{C}$ devido ao Lema de Yoneda (Versão Fraca). Logo dois objetos representando o mesmo funtor são canônicamente isomorfos. A condição de um funtor ser representável pode ser dada por uma expressão com a versão mais geral do Lema de Yoneda.

References

[1] Saunders Mac Lane. *Homology.* Springer-Verlag, 1995.

[2] Joseph Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Springer-Verlag, 2009.

[3] Angelo Vistoli. "Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory". In: *arXiv preprint math/0412512* (2004).